数学科同窓会主催 第 6 回 夏期数学セミナー報告

数学科同窓会主催の夏期数学セミナーが 7 月 27 日，28 日に理学部の教室で行なわれました．本セミナーは「卒業後も学びの場を残す」ことを掲げて，数学教室のご協力のもと毎年開催しています．

今年は講師の先生として，早稲田大学名誉教授の広中由美子先生 (1977 年院修数) をお迎えし，

「p 進の世界 〜合同式から等式へ，局所と大域を結ぶもの〜」

というテーマでお話いただきました．

数論において，不定方程式の解が存在するかを考える手法として用いられる「局所体 (p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ や実数体 $\mathbb{R}$ など) で成り立つことが大域体 (有理数体 $\mathbb{Q}$ など) でも成り立つという Hasse の原理」が 2 次形式に対して成り立つことが示される Hasse-Minkowski の定理を 1 つの目標として，基礎知識を必要とせず理解できるよう合同式から話を始め，p 進数の構成，合同式の解から p 進数の解への持ち上げ，2 次形式について，局所体上の 2 次形式，Hasse-Minkowski の定理という順に，順を追ってきちんと証明をしながら説明して下さいました．

・まず，各素数 p に対して，p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ を構成し，さらに p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ と p 進位相の定義をしました．p 進数という言葉の通り，$\mathbb{Z}_p$ の元は p 進展開 $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_l p^l + \cdots$，$(0 \leq a_i \leq p-1, i = 0, 1, 2, \cdots)$ (収束は p 進位相による) を考えると理解しやすいものであることがわかりました．

・次に p のあるべきを法とする合同式の解が，方程式の $\mathbb{Z}_p$ における解へある条件の下で持ち上がるという Hensel の補題の証明などをしました．

・2 次形式論に入り，任意の体 k の元 a に対して，k 上の n 変数 2 次形式 f について $f(\mathbb{X}) = a$ が k^n に解をもつとき f が k 上 a を表すといい，f を行列表示することで f が a を表す条件を考えました．

・$\mathbb{Q}_p$ 上の非退化 2 次形式がどのような $\mathbb{Q}_p$ の元を表すかについて，Hilbert 記号を定義しそのような $\mathbb{Q}_p$ の元の条件を考えました．また，$\mathbb{R}$ の場合についても同様な考察をしました．

・最後に「$\mathbb{Q}$ 上の非退化 2 次形式 f と $a \in \mathbb{Q}^\times$ について，f が $\mathbb{Q}$ 上 a を表すことと，f が $\mathbb{R}$ 上およびすべての素数 p について $\mathbb{Q}_p$ 上 a を表すことは同値である」という Hasse-Minkowski の定理の説明とさらに高次の場合は同様には成り立たないことなどの説明がありました．

先生ご自身の保型形式の研究の基盤となる 2 次形式論に触れることができ，整数論の奥深さを感じることができました．

今年は対面のみの黒板を使った講義で，理学部 2 号館の教室での丁寧な板書での説明を聞いていると，学生の頃の授業を思い出して懐かしく感じられました．参加者は 22 名で，今年は現役の学生さんの参加も多く，また卒業生の中には同級生で誘い合わせて参加している学年もあり，学生時代にタイムスリップしたような 2 日間でした．来年も多くの方々の参加をお待ちしております．